คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ครูกาญจนา ด้วงนา

โรงเรียนตากพิทยาคม

DATE :

บทที่ 4 ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็น

4.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

เนื่องจากตัวแปรสุ่มต่อเนื่องเป็นเซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นช่วงซึ่งเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ใช้เส้นโค้งความหนาแน่น (density curve) เขียนแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็น

โดยความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มจะมีค่าอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง จะเท่ากับพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งความหนาแน่นกับแกน x ในช่วงนั้น จะเรียกพื้นที่บริเวณดังกล่าวว่า **พื้นที่ใต้เส้นโค้งความหนาแน่น**

เส้นโค้งความหนาแน่นเป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยที่ x แทนค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม เรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function)**

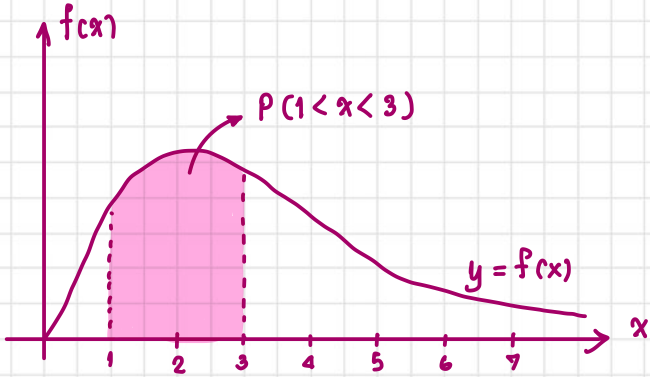
หมายเหตุ

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ก็ต่อเมื่อ

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ที่เป็นค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม X
2. พื้นที่ใต้เส้นโค้งความหนาแน่นทั้งหมดจะเท่ากับ 1

DATE :

พิจารณาเส้นโค้งความหนาแน่นของตัวแปรสุ่ม X ดังรูป



พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ นั่นคือ $P(1<x<3) = \int^{3} f(x)\,dx$

ถ้าให้ x เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง และ a เป็นค่าที่เป็นไปได้ของ X จะได้ว่า $P(X=a) = 0$ เนื่องจากพื้นที่ใต้เส้นโค้งความหนาแน่นจาก a ถึง a เท่ากับศูนย์ ดังนั้น สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง จะไม่พิจารณาความน่าจะเป็นของการเกิดค่าของตัวแปรสุ่มค่าใดค่าหนึ่ง

* สนใจเฉพาะความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มจะมีค่าอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง

โดยความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มจะมีค่าอยู่ในช่วงปิด $[a, b]$ จะมีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มจะมีค่าอยู่ในช่วงเปิด (a, b)

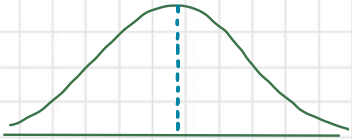
$$\therefore \quad P(a \le x \le b) = P(a < x < b)$$

$$P(x \le a) = P(x < a)$$

$$P(x \ge a) = P(x > a)$$

DATE :

4.3.1 การแจกแจงปกติ



→ การแจกแจงปกติ

→ ลักษณะสมมาตรคล้ายระฆัง

บทนิยาม 5

การแจกแจงปกติ (normal distribution) คือ การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$

โดยที่ μ แทนค่าเฉลี่ย

และ σ แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

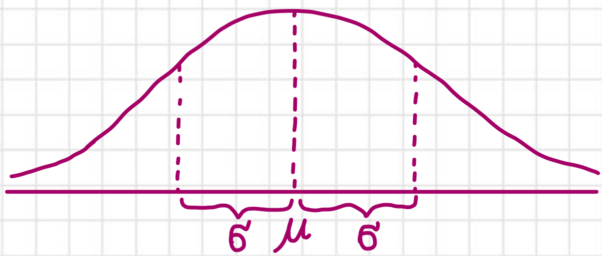
ถ้าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงปกติ แล้วเมื่อเขียนกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรสุ่ม X จะได้เส้นโค้งปกติ (normal curve) ซึ่งเป็นเส้นโค้งรูประฆังที่มีสมบัติ ดังต่อไปนี้

1. เส้นโค้งมีเส้นตั้งฉากกับแกน x ที่ลากผ่านค่าเฉลี่ยเป็นแกนสมมาตร ทำให้พื้นที่ใต้เส้นโค้งทางด้านซ้ายของค่าเฉลี่ยเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งทางด้านขวาของค่าเฉลี่ย

2. ปลายเส้นโค้งทั้งสองด้านเข้าใกล้แกน x แต่จะไม่ตัดแกน x หรือกล่าวได้ว่าแกน x เป็นเส้นกำกับแนวนอน

3. ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (หรือความแปรปรวน) จะเป็นตัวกำหนดลักษณะของเส้นโค้งว่ามีแกนสมมาตรอยู่ที่ใด และมีการกระจายจากค่าเฉลี่ยมากน้อยเพียงใด

ตัวอย่าง เส้นโค้งที่มีค่าเฉลี่ย (μ) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ)

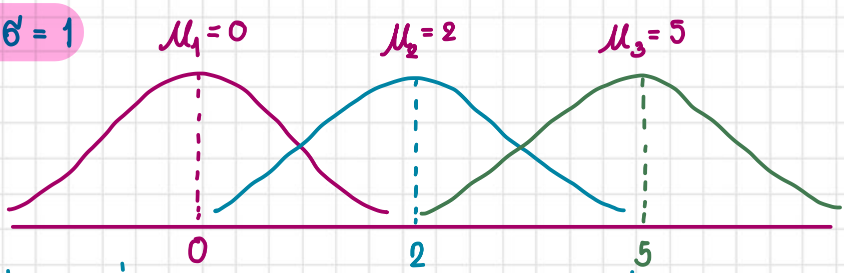


DATE :

ถ้าค่าเฉลี่ยหรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรค่าใดค่าหนึ่งหรือทั้งสองค่าเปลี่ยนแปลงไป เส้นโค้งปกติจะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย แต่ยังคงเป็นเส้นโค้งรูประฆัง

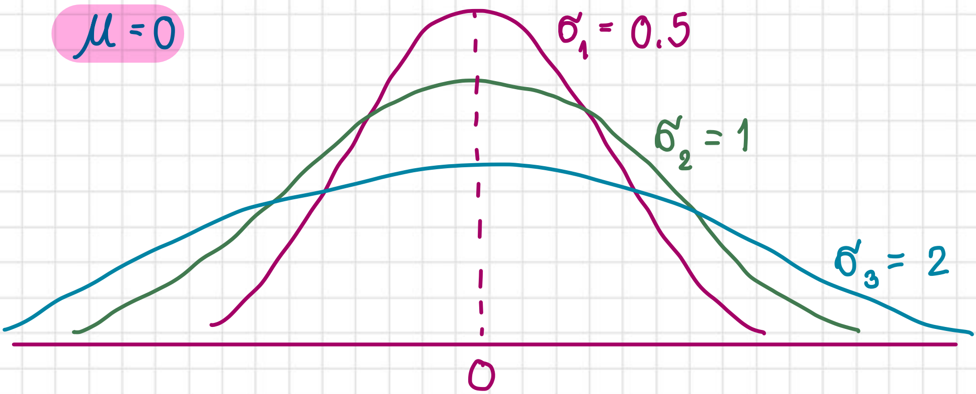
เมื่อค่าเฉลี่ยแตกต่างกัน แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน

$\sigma = 1$

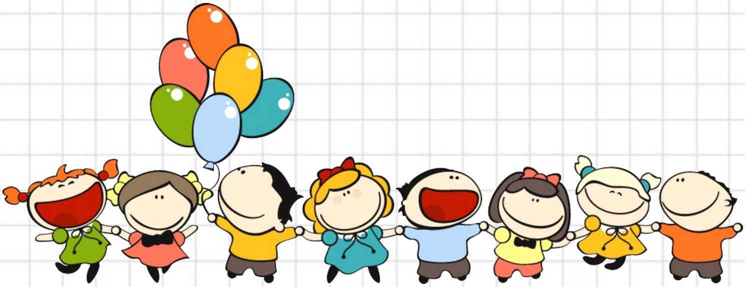


เมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแตกต่างกัน ค่าเฉลี่ยเท่ากัน

$\mu = 0$



ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติ โดยที่ μ แทนค่าเฉลี่ย และ σ^2 แทนความแปรปรวน จะเรียกตัวแปรสุ่ม X ว่า ตัวแปรสุ่มปกติ เรียก μ และ σ^2 ว่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติ และเขียนสัญลักษณ์ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ เพื่อแสดงว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงปกติที่มี μ และ σ^2 เป็นพารามิเตอร์



DATE :

4.3.2 การแจกแจงปกติมาตรฐาน

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

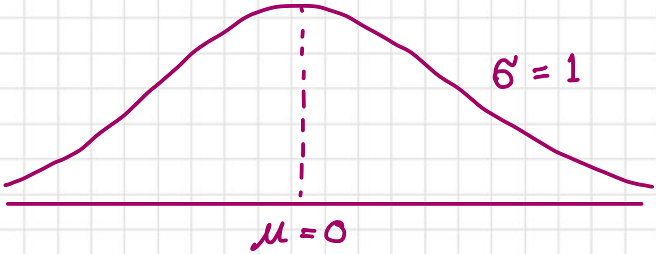
บทนิยาม

การแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) คือการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ($\mu = 0$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1 ($\sigma = 1$)

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Z ที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน คือ

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$ เมื่อ $-\infty < z < \infty$

เรียกเส้นโค้งปกติซึ่งได้จากตัวแปรสุ่มปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 ว่า เส้นโค้งปกติมาตรฐาน



เรียกตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐานว่า ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน (standard normal random variable)

DATE :

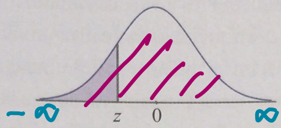
ค่าประมาณของพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานจาก $-\infty$ ถึง z หรือความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน Z มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(Z \le z)$

$P(Z < -1.25)$

พท. $-\infty$ ถึง -1.25 คือ 0.1056

! $P(Z > -1.25)$

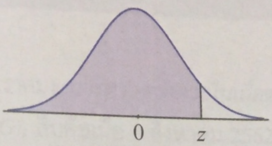
ตารางที่ 1 แสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

DATE :

ตารางที่ 1 แสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน (ต่อ)



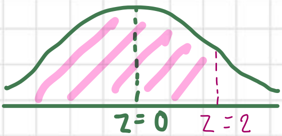
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

ตัวอย่างที่ 13

ให้ Z เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน จงหา

1) $P(Z \le 2)$ 2) $P(Z > 1.29)$ 3) $P(-1.27 \le Z \le 0.45)$

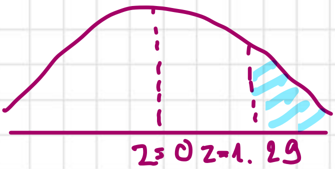
1) $P(Z \le 2)$



∴ พ.ท. $-\infty$ ถึง 2 คือ 0.9772

$\therefore P(Z \le 2) = 0.9772$

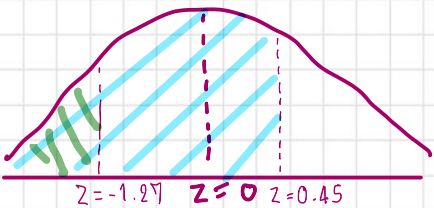
2) $P(Z > 1.29)$



พ.ท. $-\infty$ ถึง 1.29 คือ 0.9015

$$P(Z > 1.29) = 1 - P(Z < 1.29)$$
$$= 1 - 0.9015$$
$$= 0.0985$$

3) $P(-1.27 \le Z \le 0.45)$



พ.ท. $-\infty$ ถึง 0.45 คือ 0.6736

พ.ท. $-\infty$ ถึง -1.27 คือ 0.1020

$$\therefore P(-1.27 \le Z \le 0.45) = P(Z \le 0.45) - P(Z \le 0.1020)$$
$$= 0.6736 - 0.1020 = 0.5716$$ ✗✗

DATE :

กรณีที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปกติ แต่ไม่ใช่การแจกแจงปกติมาตรฐาน ไม่สามารถใช้ตารางที่ 1 ในการหาความน่าจะเป็นได้

ดังนั้น จะต้องแปลงตัวแปรสุ่มปกติให้เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2

ให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ

ถ้าตัวแปรสุ่ม Z นิยามโดย $\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม Z จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน นั่นคือ $\mu_Z = 0$ และ $\sigma_Z = 1$

นอกจากนี้

$$\boxed{P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)}$$

เมื่อ a, b เป็นค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม X และ $a \le b$

DATE :

ตัวอย่างที่ 14

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

กำหนดให้ $X \sim N(3.5, 4)$ จงหา $P(2.4 < x < 5.2)$

<u>วิธีทำ</u> $\because$ $X \sim N(3.5, 4)$

$\therefore$ ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติ

โดยที่ $\mu = 3.5$ $\sigma^2 = 4$ $\sigma = 2$

ให้ $\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$

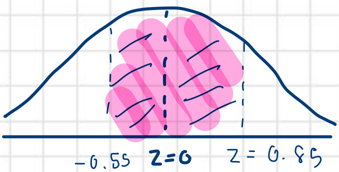
ดังนั้น $P(2.4 < X < 5.2) = P\left(\frac{2.4-3.5}{2} < Z < \frac{5.2-3.5}{2}\right)$

$= P(-0.55 < Z < 0.85)$

$= P(Z < 0.85) - P(Z < -0.55)$

$= 0.8023 - 0.2912$

$= 0.5111$



DATE :

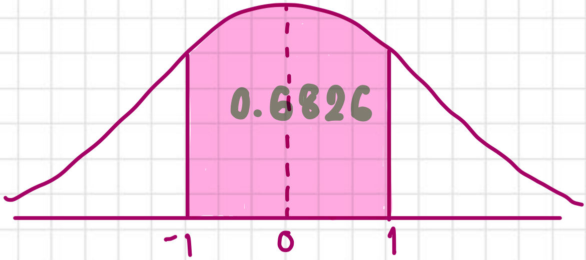
สำหรับตัวแปรสุ่มปกติ X ที่มีค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ และตัวแปรสุ่ม Z นิยามโดย $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ จะได้ว่า

1. $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1)$

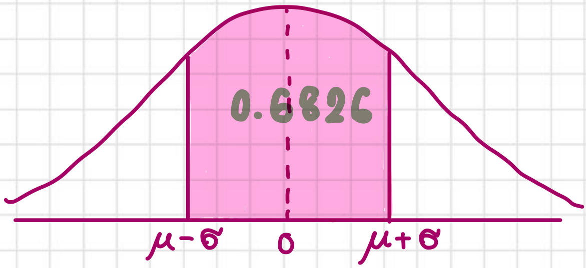
$$= P(Z \leq 1) - P(Z < -1)$$

$$= 0.8413 - 0.1587$$

$$= 0.6826$$



นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าอยู่ในช่วง $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ มีค่าประมาณ 0.6826 หรือพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติจาก $\mu-\sigma$ ถึง $\mu+\sigma$ มีค่าประมาณ 68.26 % ของพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติทั้งหมด



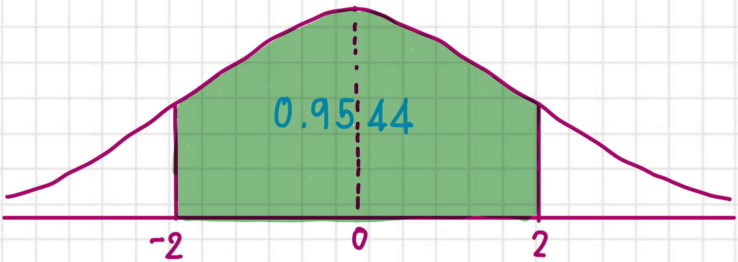
DATE :

2. $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2)$

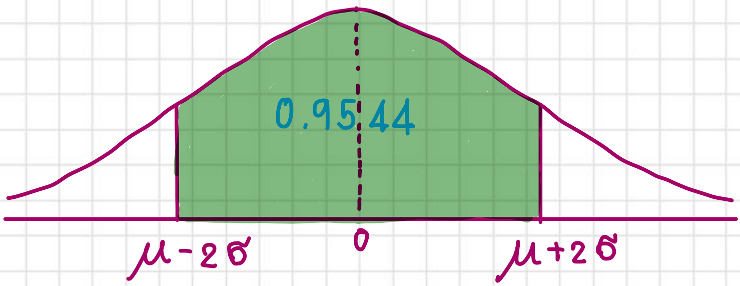
$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$

$= 0.9772 - 0.0228$

$= 0.9544$



นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าอยู่ในช่วง $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ มีค่าประมาณ 0.9544 หรือพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติจาก $\mu-2\sigma$ ถึง $\mu+2\sigma$ ถึงประมาณ 95.44 % ของพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ



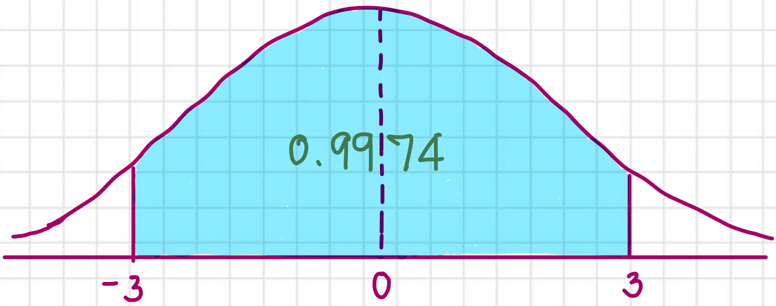
DATE :

3. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3)$

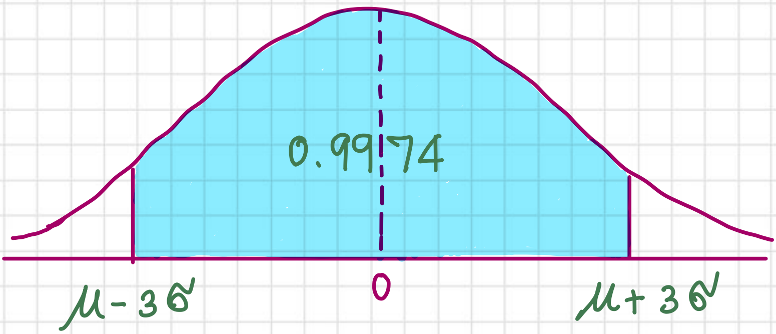
$= P(Z \leq 3) - P(Z < -3)$

$= 0.9987 - 0.0013$

$= 0.9974$



นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าอยู่ในช่วง $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ มีค่าประมาณ 0.9974 หรือพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติจาก $\mu-3\sigma$ ถึง $\mu+3\sigma$ มีค่าประมาณ 99.74 % ของพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติทั้งหมด



DATE :

ตัวอย่างที่ 15

ความสูงของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 160 และ 5 เซนติเมตร ตามลำดับ ถ้าสุ่มนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 1 คน จากโรงเรียนนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนที่สุ่มได้จะมีความสูง

1) ระหว่าง 150 และ 170 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ตัวแปรสุ่ม X คือ ความสูง

จะได้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติ

$$P(150 < X < 170) = P\left(\frac{150-160}{5} < Z < \frac{170-160}{5}\right)$$

$$= P(-2 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z \leq -2)$$

$$= 0.9772 - 0.0228$$

$$= 0.9544$$

∴ ความน่าจะเป็นที่นักเรียนที่สุ่มได้จะมีความสูงระหว่าง 150 และ 170 เซนติเมตร คือ 0.9544

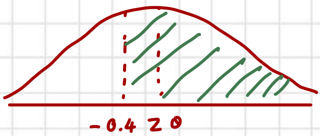
DATE :

2) มากกว่า 162 เซนติเมตร

$$P(X > 162) = P\left(Z > \frac{162-160}{5}\right)$$

$$= P\left(Z > -\frac{2}{5}\right)$$

$$= P(Z > -0.4)$$



$$= 1 - P(Z \le -0.4)$$

$$= 1 - 0.6554 = 0.3446$$

∴ ความน่าจะเป็นที่นักเรียนที่สุ่มได้จะมีความสูงมากกว่า 162 เซนติเมตร คือ 0.3446

DATE :

เปอร์เซ็นไทล์ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

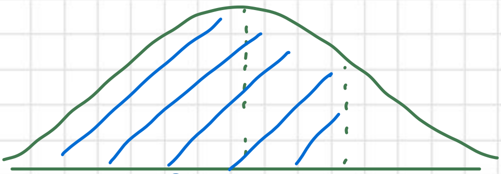
ตัวอย่างที่ 16 อายุการใช้งานของถ่านไฟฉายชนิดหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ โดยค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 756 และ 35 นาที ตามลำดับ จงหา

1) ถ่านไฟฉายที่มีอายุการใช้งานน้อยกว่า 791 นาที มีกี่เปอร์เซ็นต์ของถ่านไฟฉายทั้งหมด

วิธีทำ ให้ตัวแปรสุ่ม X คือ อายุการใช้งานของถ่านไฟฉาย

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติ $\mu = 756$, $\sigma = 35$

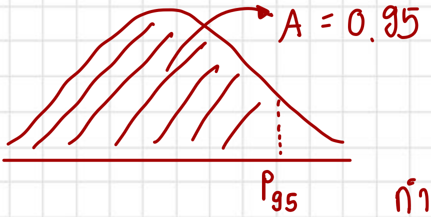
$$
\begin{aligned}
P(X < 791) &= P\left(Z < \frac{791-756}{35}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{35}{35}\right) \\
&= P(Z < 1) \\
&= 0.8413
\end{aligned}
$$



∴ ถ่านไฟฉายที่มีอายุการใช้งานน้อยกว่า 791 นาที มี 84.13 % ของถ่านไฟฉายทั้งหมด

DATE :

2) ถ่านไฟฉายที่มีอายุการใช้งานมากกว่าหรือเท่ากับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 95 สามารถใช้งานได้อย่างน้อยกี่นาที เมื่อ $P(Z < 1.645) = 0.95$



$$P(X < x) = 0.95$$

$$P\left(Z < \frac{x - 756}{35}\right) = 0.95$$

กำหนด $P(Z < 1.645) = 0.95$

$$\frac{x - 756}{35} = 1.645$$

$$x = 1.645 \times 35$$

$$x = (1.645 \times 35) + 756$$

$$x = 813.575$$

∴ นั่นคือ ถ่านไฟฉายที่มีอายุการใช้งานมากกว่าหรือเท่ากับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 95 สามารถใช้งานได้อย่างน้อย 813.575 นาที

DATE :

DATE :

ตัวอย่างที่ 17 พิมพ์ชนกสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาภาษาอังกฤษซึ่งมีคะแนนเต็ม 100 คะแนนเท่ากันได้ 75 และ 72 คะแนน ตามลำดับ ถ้าคะแนนสอบทั้งสองวิชาของนักเรียนห้องนี้มีการแจกแจงปกติ โดยค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องนี้เท่ากับ 73 และ 16 คะแนน ตามลำดับ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษของนักเรียนห้องนี้เท่ากับ 70 และ 10 คะแนน ตามลำดับ จงพิจารณาว่าพิมพ์ชนกเรียนวิชาไหนได้ดีกว่ากัน

วิธีทำ ให้ตัวแปรสุ่ม X และ Y คือคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษของนักเรียนห้องนี้ ตามลำดับ

จะได้ $\mu_X = 73$ $\sigma_X = 16$ และ $\mu_Y = 70$ $\sigma_Y = 10$

วิชาคณิตศาสตร์ $Z_X = \frac{75-73}{16} = \frac{2}{16} = 0.125$

วิชาภาษาอังกฤษ $Z_Y = \frac{72-70}{10} = \frac{2}{10} = 0.2$

พิมพ์ชนกเรียนวิชาภาษาอังกฤษได้ดีกว่าวิชาคณิตศาสตร์

DATE :

ตัวอย่างที่ 18 นิติและนิพนธ์เป็นนักเรียนห้องเดียวกัน เข้าสอบฟิสิกส์ด้วยกัน นิติได้คะแนนสอบ 55 คะแนน ซึ่งปรับเป็นค่าของตัวแปรสุ่มมาตรฐานได้เป็น -0.8 ส่วนนิพนธ์ได้คะแนนสอบ ๗2 คะแนน ซึ่งปรับเป็นค่าของตัวแปรสุ่มมาตรฐานได้เป็น 1.4 ถ้าคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ของห้องนี้มีการแจกแจงปกติ จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ของนักเรียนห้องนี้

วิธีทำ ให้ตัวแปรสุ่ม X คือ คะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ของนักเรียนห้องนี้

จะได้ ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติ

ให้ x_1 และ x_2 คือคะแนนสอบฟิสิกส์ของนิติและนิพนธ์ตามลำดับ

$\therefore x_1 = 55$ และ $x_2 = 72$

$z_1 = -0.8$ และ $z_2 = 1.4$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$-0.8 = \dfrac{55-\mu}{\sigma}$ $\qquad$ $1.4 = \dfrac{72-\mu}{\sigma}$

$-0.8\sigma = 55-\mu$ —— ① $\qquad$ $1.4\sigma = 72-\mu$ —— ②

② - ① $\quad 1.4\sigma - (-0.8\sigma) = 17$

$2.2\sigma = 17$

$\sigma = 7.73$

$1.4(7.73) = 72-\mu$

$\mu = 72 - 10.822$

$\mu = 61.178$ ##